Vorlesung 2a

Diskret uniform verteilte Zufallsvariable

(Buch S. 6-11)

Erinnerung und Auftakt

Sei S eine endliche Menge.

Eine Zufallsvariable X heißt *uniform verteilt auf S*,

wenn

$$\mathbf{P}(X = a) = \frac{1}{\#S} \quad \text{für alle } a \in S.$$

Damit beschreibt X eine rein zufällige Wahl aus S.

Beispiel aus Vorlesung 1b:

$$S = \{1, 2, \ldots, g\}^n$$

X := rein zufällige $1 \ldots g$ - Folge der Länge n.

Eine auf einem endlichen Wertebereich uniform verteilte Zufallsvariable nennt man auch diskret uniform verteilt.

Heute lernen wir drei weitere Beispiele

von diskret uniform verteilten Zufallsvariablen kennen:

1. Rein zufällige Permutation
2. Rein zufällige k-elementige Teilmenge
3. Uniform verteilte Besetzung

Bei der Gelegenheit erarbeiten wir auch ein paar

Hilfen fürs Abzählen.

Teil 1

Rein zufällge Permutation

(Buch S. 6-8)

1. Elementares

Eine *Permutation* von $1, \dots, n$

ist eine bijektive Abbildung der Menge $\{1, \dots, n\}$ auf sich.

Z. B. mit $n = 7$

$$\begin{array}{ccccccc} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 \\ \downarrow & \downarrow & \downarrow & \downarrow & \downarrow & \downarrow & \downarrow \\ 5 & 2 & 7 & 3 & 1 & 4 & 6 \end{array}$$

Wie wahrscheinlich ist es,

dass eine rein zufällige Permutation

genau **so** ausfällt?

Wieviele Permutationen von $1, \ldots, n$ gibt es?

n Möglichkeiten für das Bild von 1

mal $(n-1)$ Möglichkeiten für das Bild von 2

mal $(n-2)$ Möglichkeiten für das Bild von 3

$$\ldots$$

$$= n(n-1)(n-2)\cdots 2 \cdot 1 = n!$$

Sei X eine rein zufällige Permutation von $1, \ldots, n$,

d.h. eine Zufallsvariable, deren Zielbereich

$S :=$ die Menge aller Permutationen von $1, \ldots, n$

ist, und die auf S uniform verteilt ist.

Für alle Elemente $a \in S$ gilt also:

$$\mathbf{P}(X = a) = \frac{1}{n!}$$

2. Zufällige Permutation und zufälliges Ziehen

Wie kann man sich eine rein zufällige Permutation entstanden denken?

Zum Beispiel: als Folge der gezogenen Nummern beim n-maligen rein zufälligen Ziehen *ohne Zurücklegen* aus $\{1, 2, \ldots, n\}$.

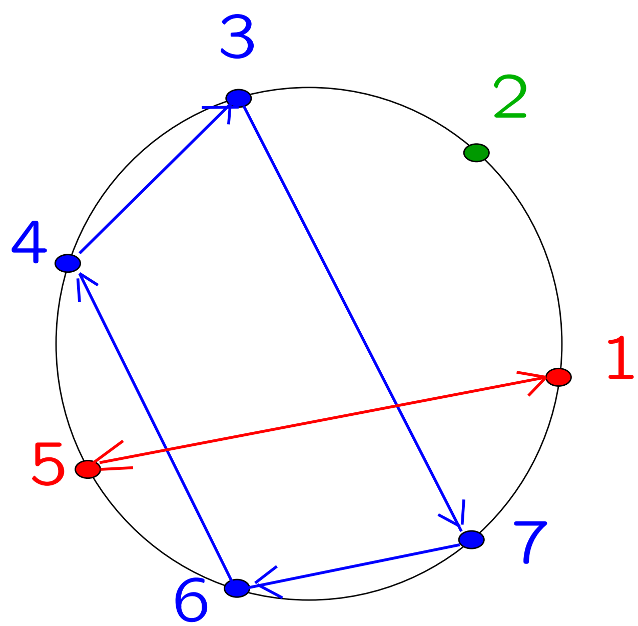
Szenario: eine stets ideal durchmischte Urne mit anfangs n Kugeln, beschriftet mit den Nummern $1, \ldots, n$. Ziehe sukzessive **ohne Zurücklegen** alle n Kugeln und notiere die gezogenen Nummern in Reihenfolge.

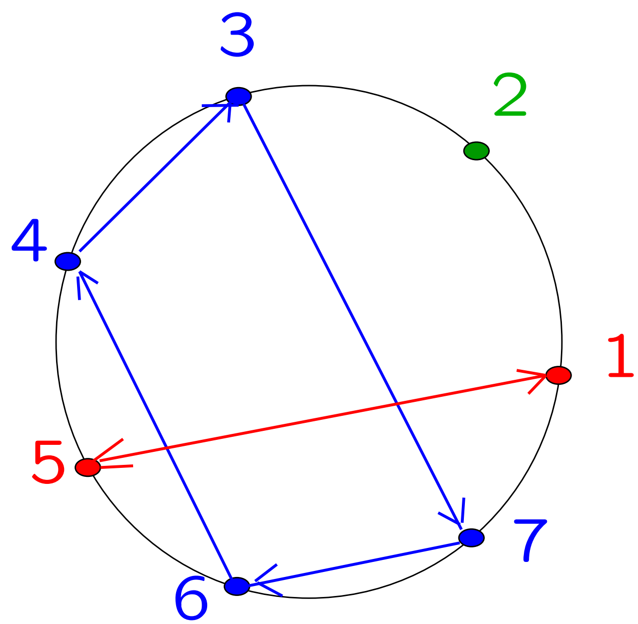
3. Zyklendarstellung einer Permutation

Jede Permutation zerfällt in **Zyklen**

Beispiel:

$$\begin{array}{ccccccc} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 \\ \downarrow & \downarrow & \downarrow & \downarrow & \downarrow & \downarrow & \downarrow \\ 5 & 2 & 7 & 3 & 1 & 4 & 6 \end{array}$$





Die Länge des Zyklus, der die Eins enthält, ist hier zwei.

Sei X eine rein zufällige Permutation von $1, \dots, 7$,

Wie wahrscheinlich ist es, dass der die 1 enthaltende Zykel genau die Länge 3 hat?

Wieviele Permutationen von $1, \dots, 7$ gibt es, bei denen der die 1 enthaltende Zykel genau die Länge 3 hat?

Es gibt davon $6 \cdot 5 \cdot 1 \cdot 4!$ Stück (warum?)

Also ist die gefragte W'keit: $\dfrac{6!}{7!} = \dfrac{1}{7}$.

Jetzt allgemein:

Für eine Permutation $a \in S$ bezeichne

$$h(a)$$

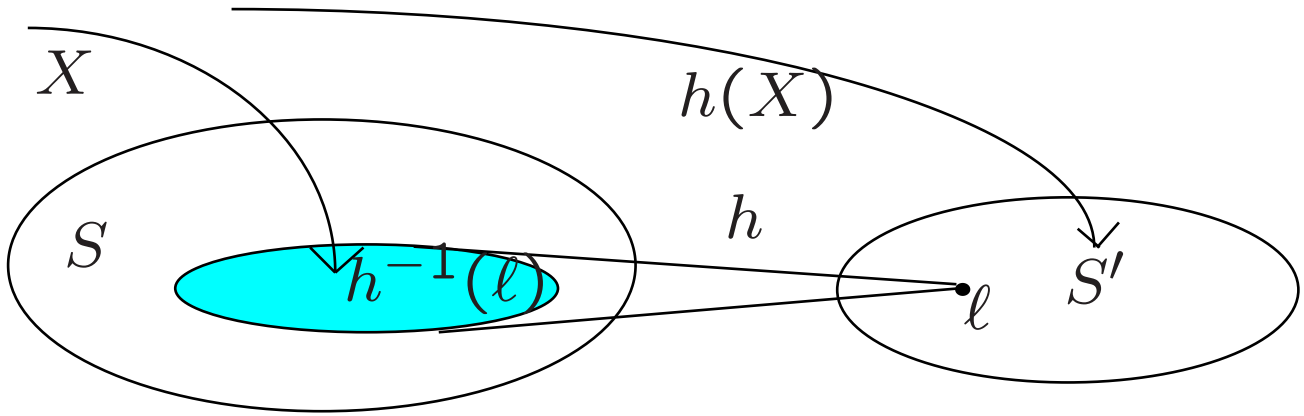
die Länge des Zyklus von a, der die Eins enthält.

Sei X eine rein zufällige Permutation von $\{1, \ldots, n\}$,

also eine rein zufällige Wahl aus S,

und sei $\ell \in \{1, 2, \ldots, n\}$.

$$\mathbf{P}(h(X) = \ell) = ?$$



$$S' = \{1, \ldots, n\}$$

Wieviele Permutationen $a \in S$ gibt es mit $h(a) = \ell$?

$$A := \{a \in S : h(a) = \ell\}$$

$$\#A = ?$$

$$A = \{a \in S : a(1) \neq 1, a^2(1) \neq 1, \ldots, \\ a^{\ell-1}(1) \neq 1, a^{\ell}(1) = 1\}$$

$$\#A = (n-1)(n-2)\cdots(n-(\ell-1)) \cdot 1 \cdot (n-\ell)\cdots 1$$

$$= (n-1)!$$

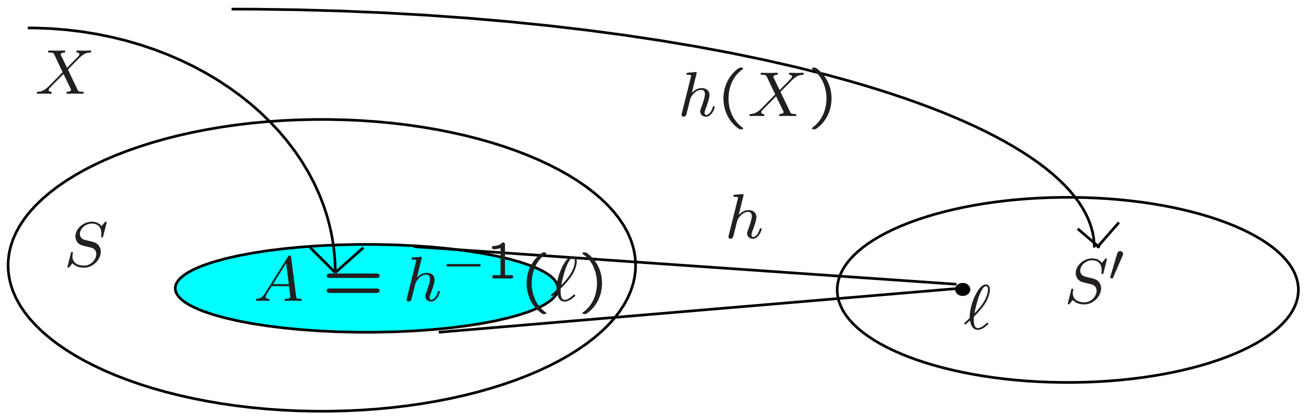
$$\#A = (n-1)!, \qquad \#S = n!$$

$$\mathbf{P}(X \in A) = \frac{\#A}{\#S}$$

$$= \frac{(n-1)!}{n!}$$

$$= \frac{1}{n}$$

$$\mathbf{P}(X \in A) = \frac{1}{n}$$



$$S' = \{1, \ldots, n\}$$

$$A = \{a \in S : h(a) = \ell\}$$

$$\{X \in A\} = \{h(X) = \ell\}$$

$$\mathbf{P}(h(X) = \ell) = \frac{1}{n}$$

$$\mathbf{P}(h(X) = \ell) = \frac{1}{n}, \quad \ell = 1, \ldots n.$$

Fazit:

Die Länge desjenigen Zyklus

einer rein zufälligen Permutation von $1, \ldots, n$,

der die Eins enthält,

ist uniform verteilt auf $\{1, \ldots, n\}$.